

# Sistem Inferensi Fuzzy

Bahan Kuliah

IF4058 Topik Khusus IF



Oleh: Rinaldi Munir

# Sistem Inferensi Fuzzy

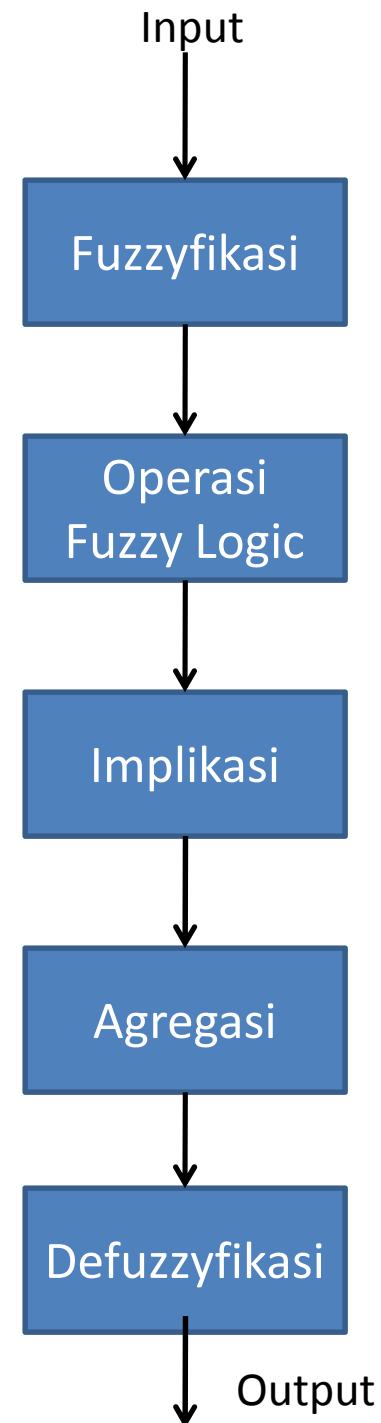
- *Fuzzy Inference System* (FIS) → Sistem Inferensi Fuzzy
- Inferensi: penarikan kesimpulan
- Sistem inferensi fuzzy: penarikan kesimpulan dari sekumpulan kaidah fuzzy
- Jadi, di dalam FIS minimal harus ada dua buah kaidah fuzzy
- Input FIS: *crisp values*
- Output FIS: *crisp values*



FIS dapat dibangun dengan metode:

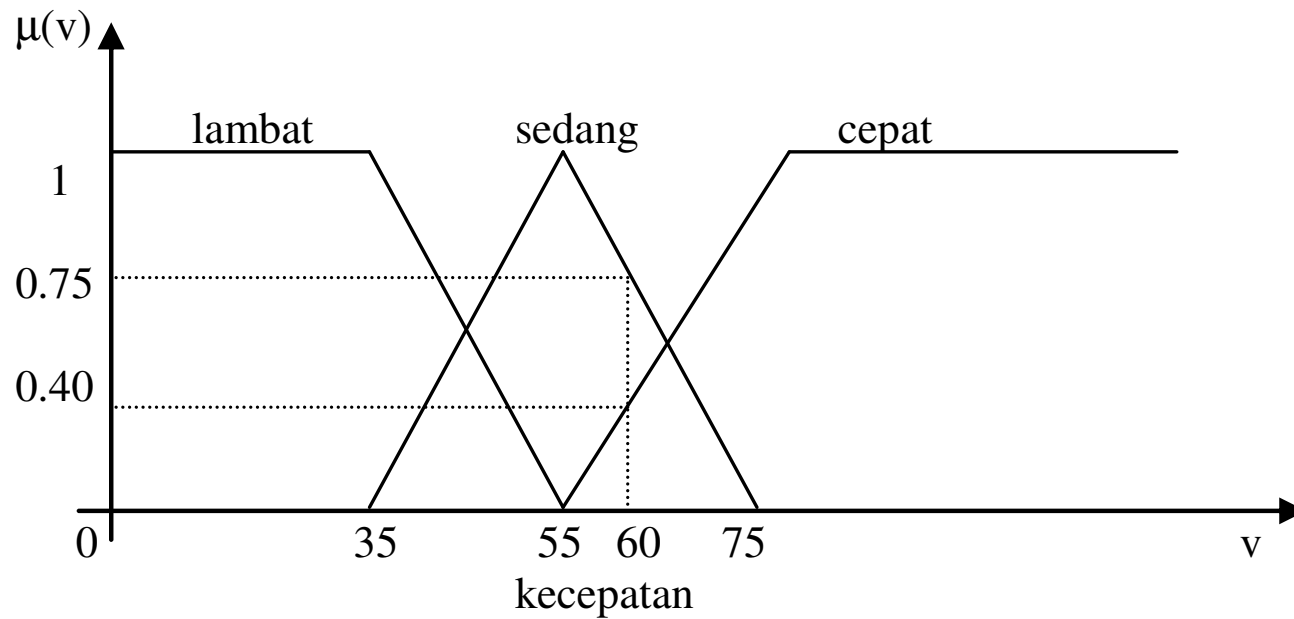
1. Metode Mamdani
2. Metode Sugeno

- Proses-proses di dalam FIS:
  1. Fuzzyfikasi
  2. Operasi *fuzzy logic*
  3. Implikasi
  4. Agregasi
  5. Defuzzyfikasi



# Fuzzyfikasi

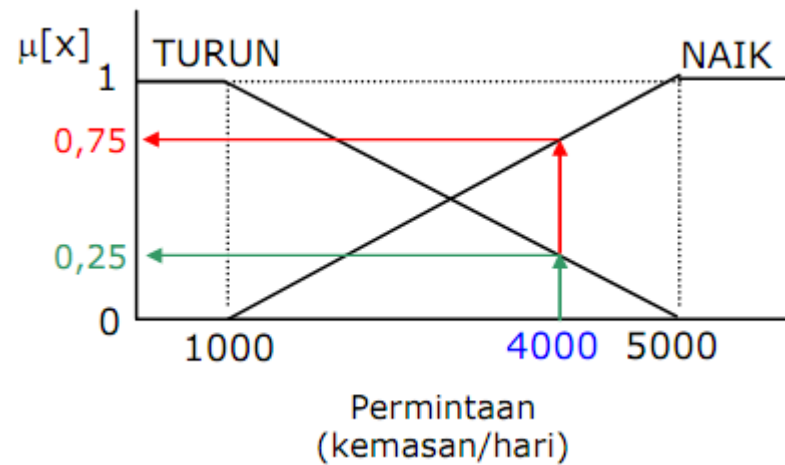
- Fuzzyfikasi: proses memetakan nilai *crisp* (numerik) ke dalam himpunan fuzzy dan menentukan derajat keanggotaannya di dalam himpunan *fuzzy*.
- Hal ini dilakukan karena data diproses berdasarkan teori himpunan fuzzy sehingga data yang bukan dalam bentuk fuzzy harus diubah ke dalam bentuk fuzzy.



- Contoh: Input:  $v = 60$  km/jam

maka  $\mu_{\text{sedang}}(60) = 0.75$

$\mu_{\text{cepat}}(60) = 0.4$



$$\mu_{\text{PmtTURUN}}[x] = \begin{cases} 1, & x \leq 1000 \\ \frac{5000 - x}{4000}, & 1000 \leq x \leq 5000 \\ 0, & x \geq 5000 \end{cases} \quad \mu_{\text{PmtNAIK}}[x] = \begin{cases} 0, & x \leq 1000 \\ \frac{x - 1000}{4000}, & 1000 \leq x \leq 5000 \\ 1, & x \geq 5000 \end{cases}$$

Input: permintaan = 4000 kemasan/hari

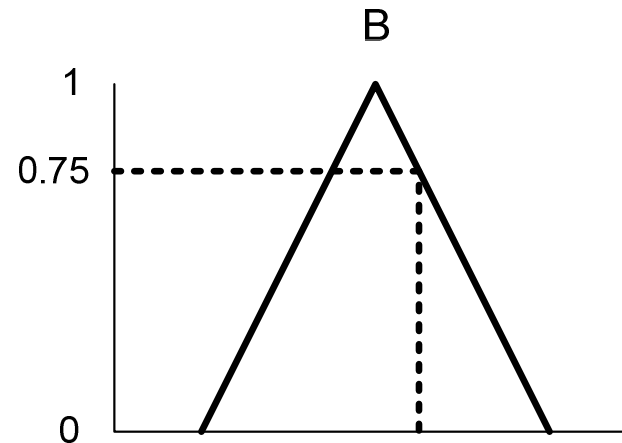
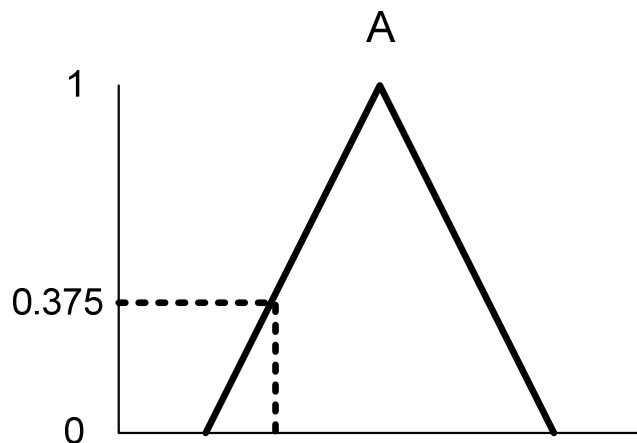
$$\begin{aligned} \mu_{\text{PmtTURUN}}[4000] &= (5000-4000)/4000 \\ &= 0,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\text{PmtNAIK}}[4000] &= (4000-1000)/4000 \\ &= 0,75 \end{aligned}$$

Sumber: Sri Kusuma Dewi/Aplikasi Logika Fuzzy

# Operasi Logika Fuzzy

- Jika bagian antesenden dihubungkan oleh konektor **and**, **or**, dan **not**, maka derajat kebenarannya dihitung dengan operasi fuzzy yang bersesuaian



var1 is A **or** var2 is B  $\Rightarrow \max(0.375, 0.75) = 0.75$

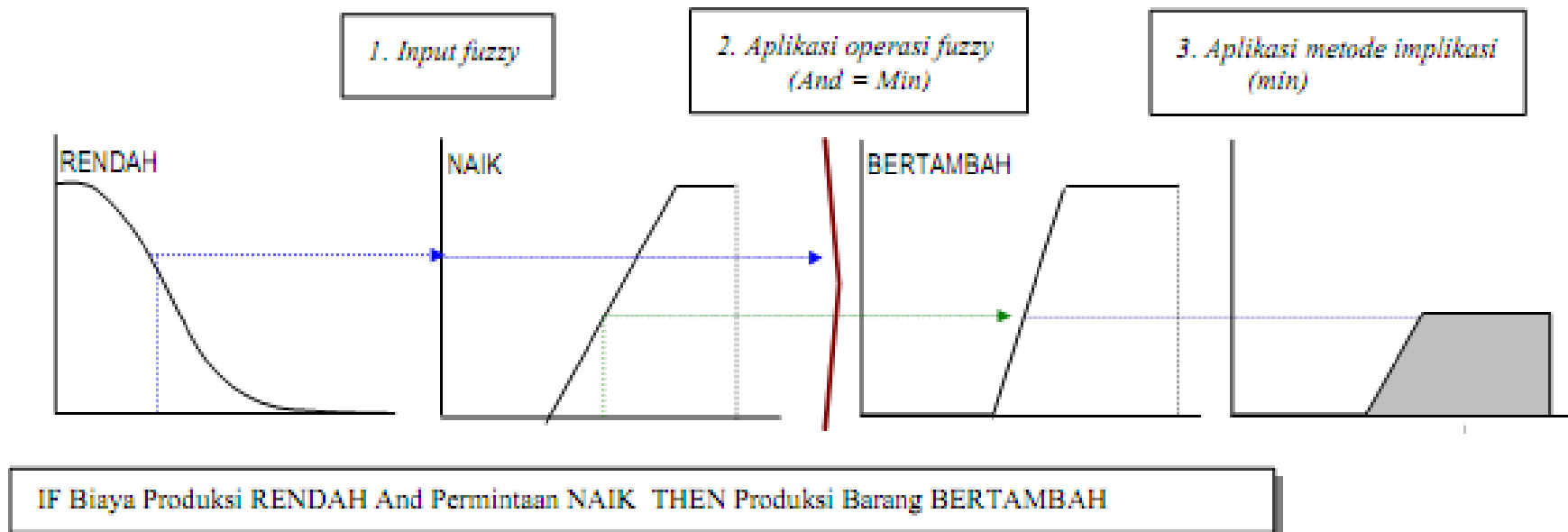
var1 is A **and** var2 is B  $\Rightarrow \min(0.375, 0.75) = 0.375$



# Implikasi

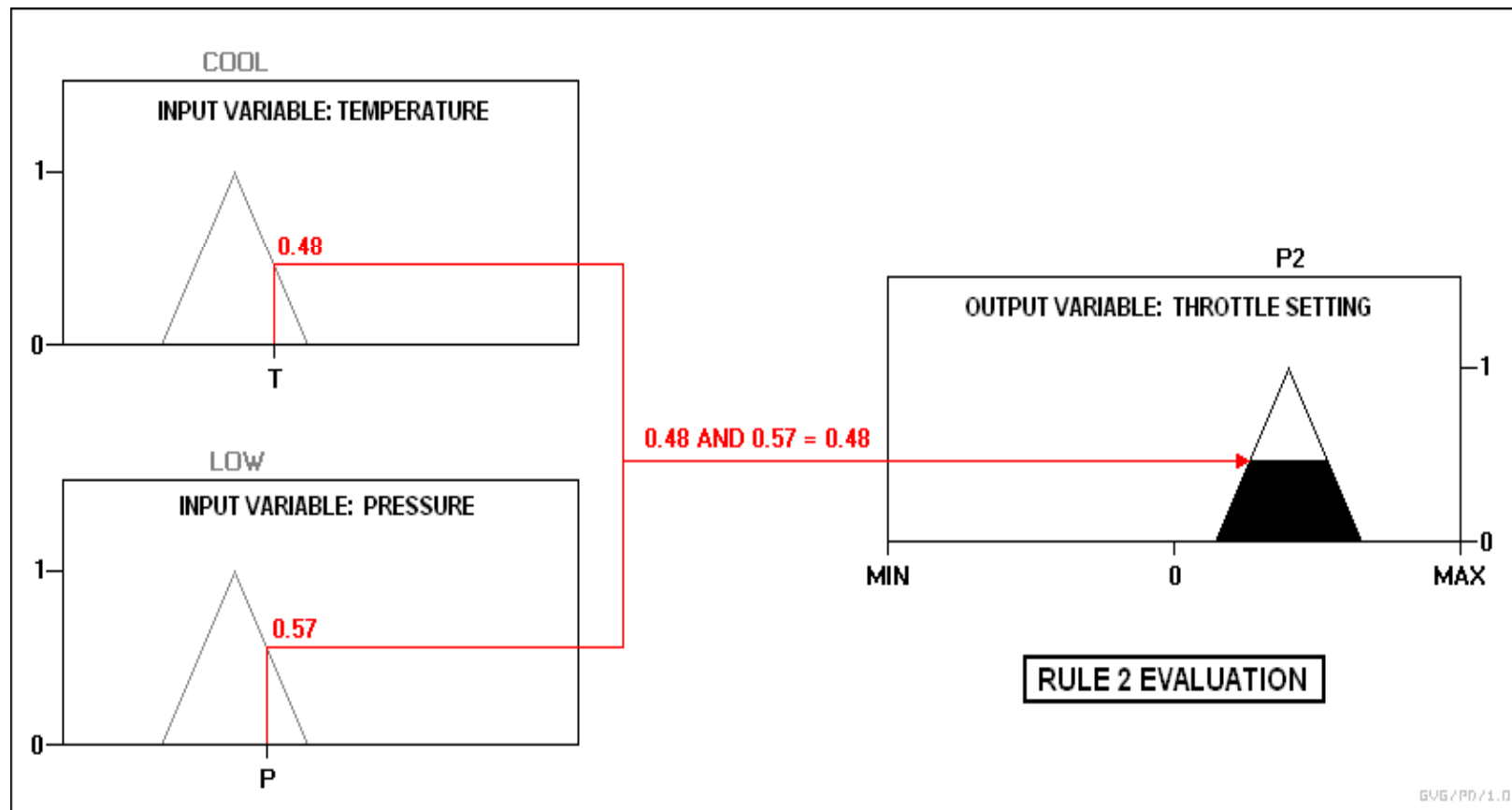
- Proses mendapatkan keluaran dari IF-THEN rule
- Metode yang umum digunakan adalah metode Mamdani
- Input: derajat kebenaran bagian antesenden dan fuzzy set pada bagian konsekuen
- Fungsi implikasi yang digunakan adalah *min*

Contoh: IF Biaya Produksi is RENDAH and Permintaan is NAIK THEN Produksi Barang is BERTAMBAH



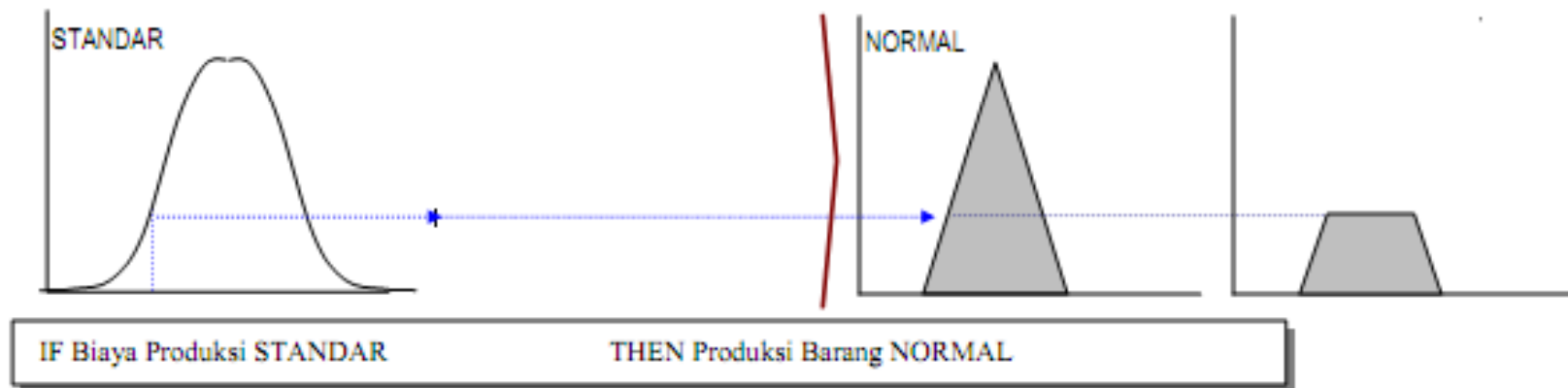
Sumber: Sri Kusuma Dewi/Aplikasi Logika Fuzzy

- Contoh:  
IF temperature IS cool AND pressure IS low,  
THEN throttle is P2.



Contoh: Jika antesenden hanya satu predikat tunggal

IF Biaya Produksi is STANDAR  
THEN Produksi Barang is NORMAL



Sumber: Sri Kusuma Dewi/Aplikasi Logika Fuzzy

# Agregasi atau Komposisi

- Jika terdapat lebih dari satu kaidah fuzzy yang dievaluasi, keluaran semua IF-THEN rule dikombinasikan menjadi sebuah fuzzy set tunggal.
- Metode agregasi yang digunakan adalah *max* atau OR terhadap semua keluaran IF-THEN rule
- Jika dilakukan fungsi min pada impikasi dan max pada agregasi, maka metode Mamdani disebut juga metode MIN-MAX (*min-max inferencing*)

- Misalkan terdapat n buah kaidah yang berbentuk:

$$\text{IF } x_1 \text{ is } A_1^k \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^k \text{ THEN } y^k \text{ is } B^k \quad k= 1, 2, \dots, n$$

yang dalam hal ini  $A_1^k$  dan  $A_2^k$  adalah himpunan fuzzy yang merepresentasikan pasangan antesenden ke- $k$ , dan  $B^k$  adalah himpunan fuzzy yang menyatakan konsekuen ke- $k$ .

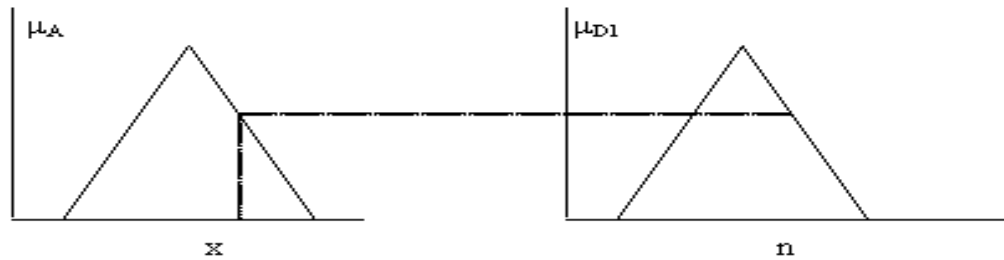
- Berdasarkan metode implikasi Mamdani, maka keluaran untuk n buah kaidah diberikan oleh:

$$\mu_B (y) = \max_k [\min[\mu_{A_1^k} (input(i)), \mu_{A_2^k} (input(j))]]$$

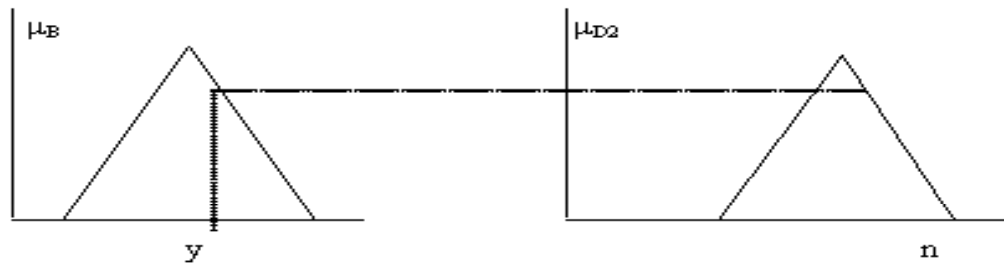
$$k = 1, 2, \dots, n$$

(a) **Ilustrasi 1:** Anteseden hanya terdiri dari sebuah proposisi.

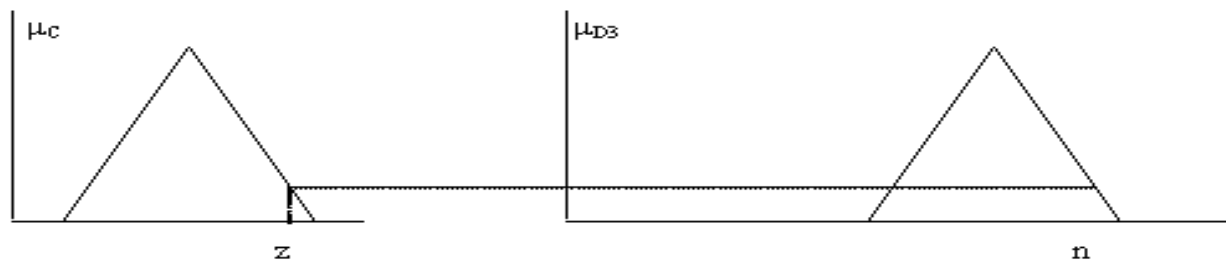
Kaidah 1: IF  $x$  is A THEN  $n$  is D1



Kaidah 2: IF  $y$  is B THEN  $n$  is D2



Kaidah 3: IF  $z$  is C THEN  $n$  is D3

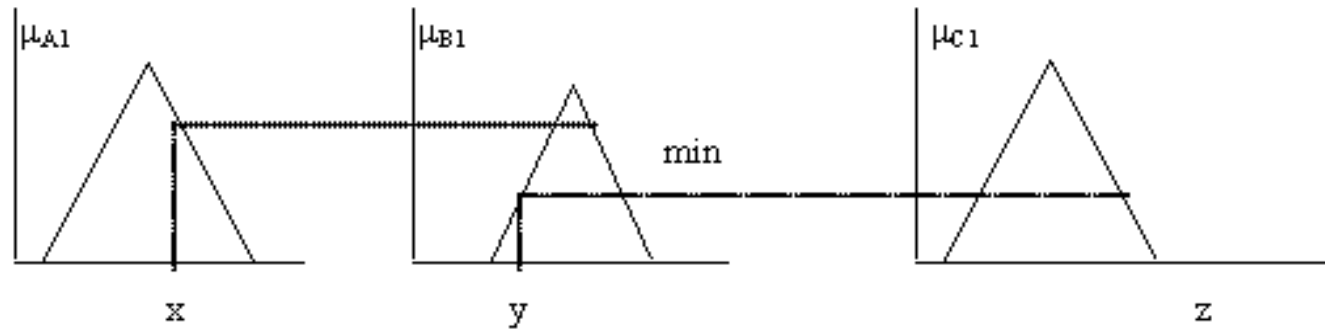


Hasil:

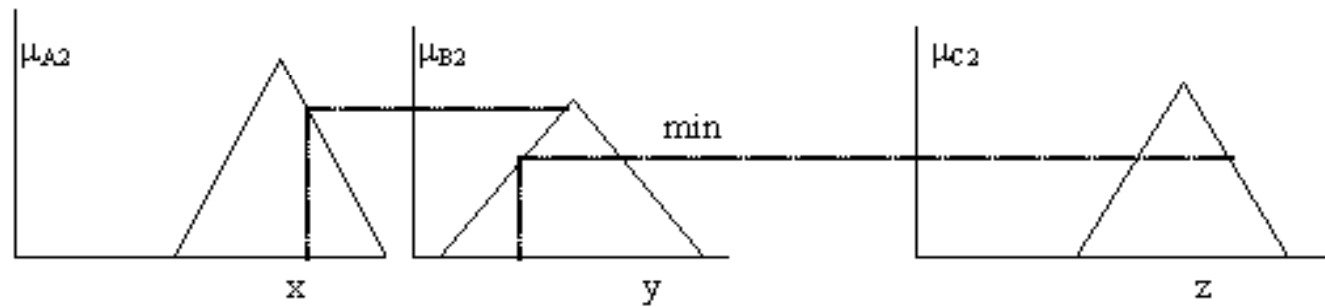


(a) **Ilustrasi 2:** Antesenden terdiri dari dua buah proposisi dengan penghubung “AND”.

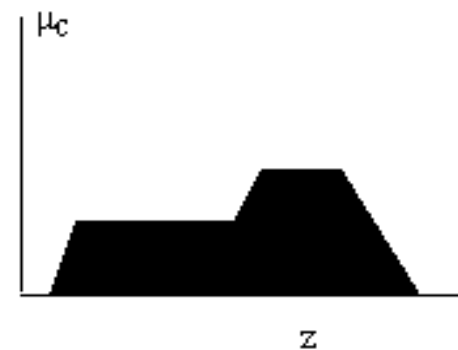
Kaidah 1: IF  $x$  is  $A_1$  AND  $y$  is  $B_1$  THEN  $z$  is  $C_1$



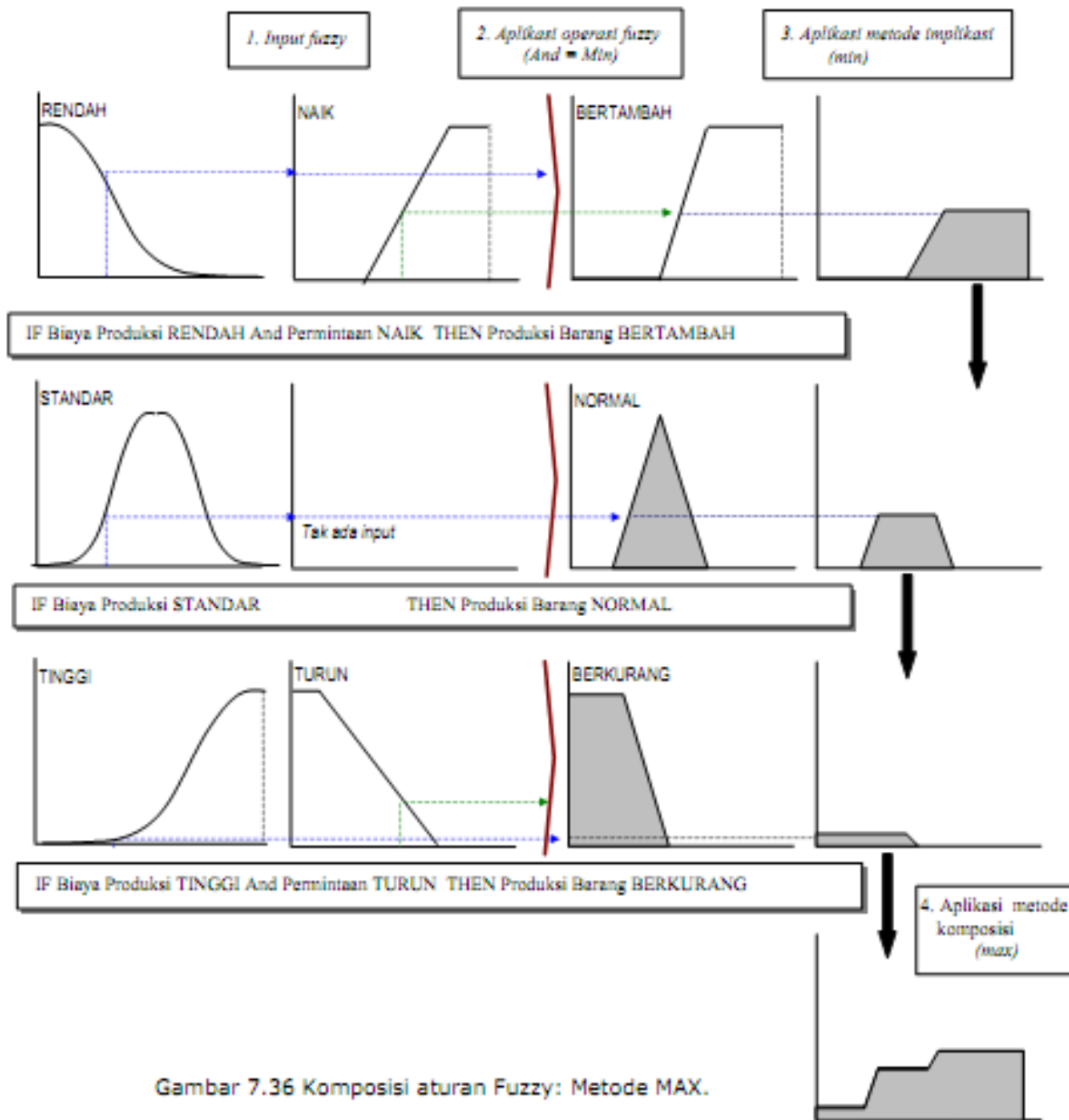
Kaidah 2: IF  $x$  is  $A_2$  AND  $y$  is  $B_2$  THEN  $z$  is  $C_2$



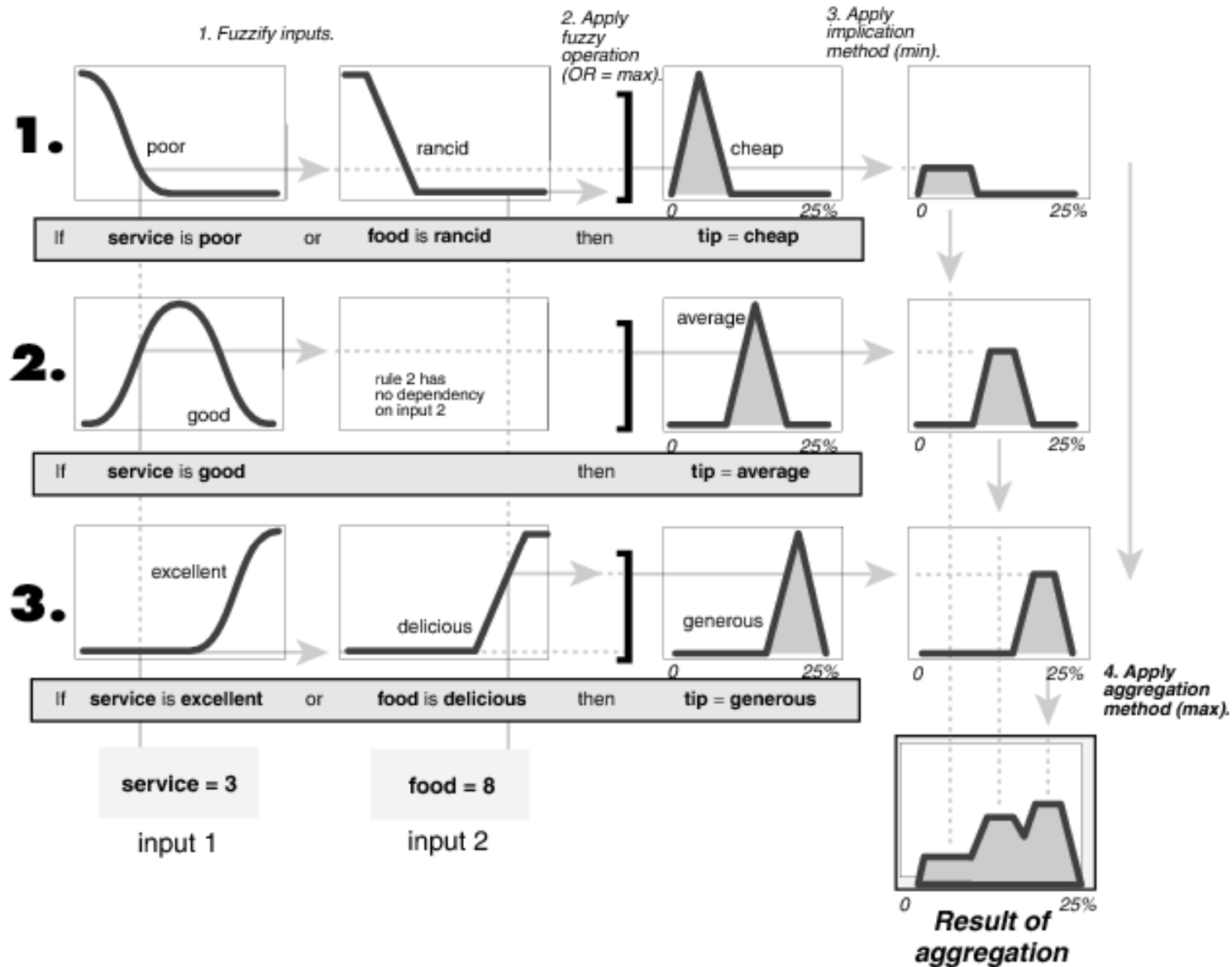
Hasil:







Gambar 7.36 Komposisi aturan Fuzzy: Metode MAX.

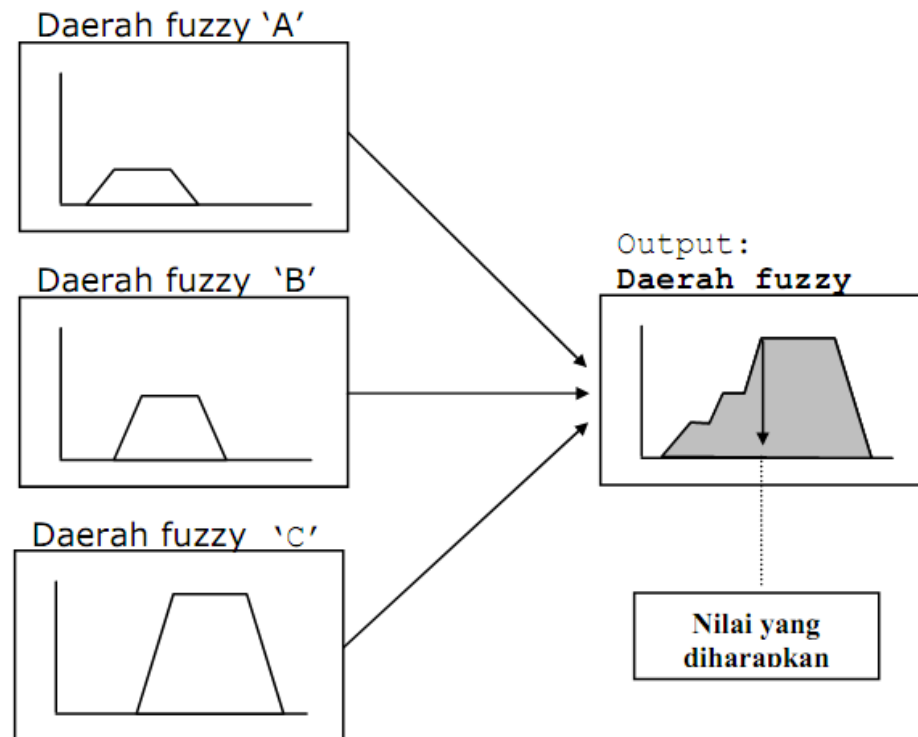


Sumber: Mathworks

# Defuzzyfikasi

- Defuzzyfikasi: proses memetakan besaran dari himpunan *fuzzy* ke dalam bentuk nilai *crisp*.

Alasan: sistem diatur dengan besaran riil, bukan besaran fuzzy.

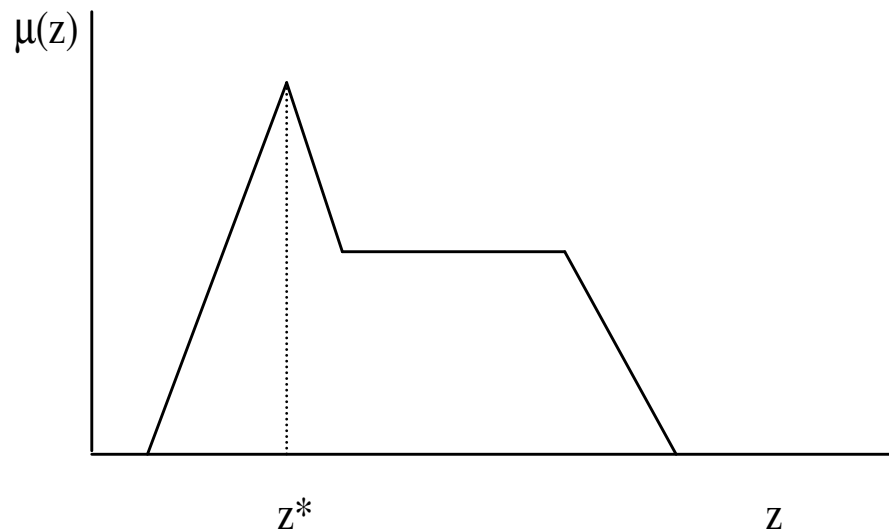


- Strategi yang umum dipakai dalam defuzzifikasi adalah menentukan bentuk kompromi terbaik.
- Metode-metode untuk strategi ini adalah:
  1. Metode keanggotaan maximum (*max-membership*)
  2. Metode pusat luas (*Center of Area, CoA*). 3
  3. Metode keanggotaan maksimum rata-rata (*Mean-max Membership atau Middle-of-Maxima*)

# 1. Metode keanggotaan maximum (*max-membership*) atau *largest maximum* (LOM)

Metode ini dikenal juga dengan metode tinggi. Solusi *crisp* diperoleh dengan mengambil derajat keanggotaan tertinggi dari semua hasil agregasi. Misalkan  $Z$  adalah himpunan fuzzy, maka

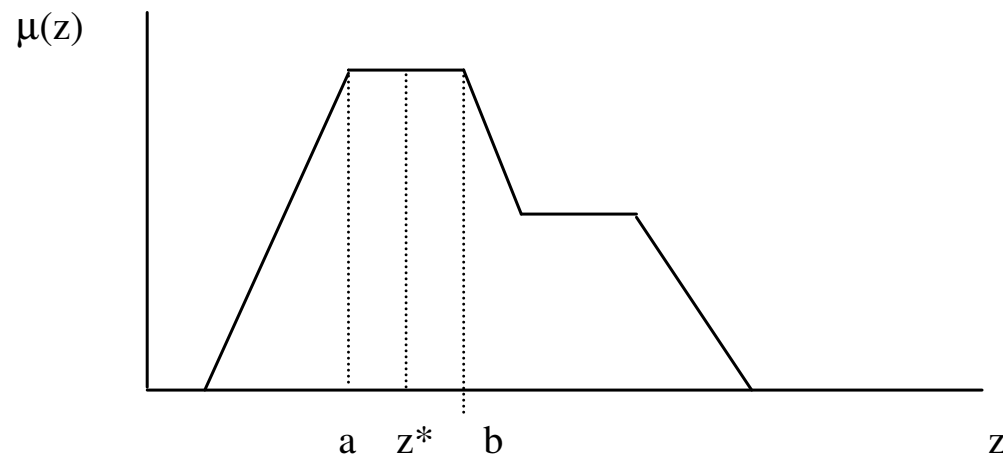
$$\mu_c(z^*) \geq \mu_c(z) \text{ untuk setiap } z \in Z$$



## 2. *Metode keanggotaan maksimum rata-rata (Mean-max Membership (MOM) atau Middle-of-Maxima)*

Metode ini hampir sama dengan metode pertama, kecuali titik maksimumnya tidak unik (berupa dataran).

Solusi *crisp* diperoleh dengan mengambil nilai rata-rata domain yang memiliki nilai keanggotaan maksimum

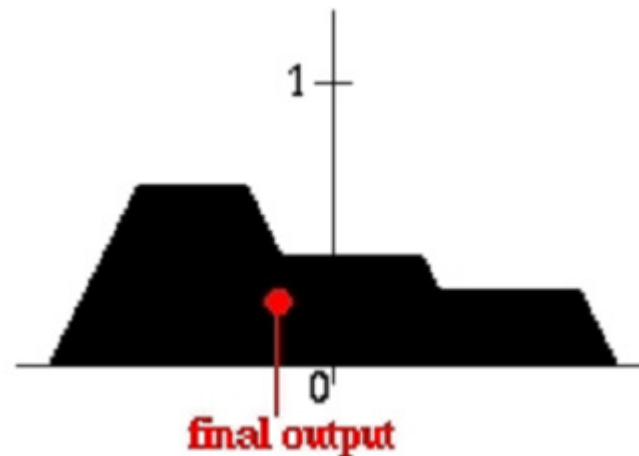


$$z^* = \frac{a + b}{2}$$

### 3. Metode pusat luas (*Center of Area, CoA*).

Metode ini dikenal juga dengan nama metode *centroid* atau *center of gravity*. Ini merupakan metode paling umum digunakan.

Solusi *crisp* diperoleh dengan menghitung pusat gravitasi (titik-berat) dari daerah agregasi.



Untuk variabel kontinu:

$$z^* = \frac{\int z \cdot \mu_C(z) dz}{\int \mu_C(z)}$$

Untuk variabel diskrit:

$$z^* = \frac{\sum_{j=1}^n z_j \cdot \mu_C(z_j)}{\sum_{j=1}^n \mu_C(z_j)}$$



- Contoh: (Sumber: **Sri Kusuma Dewi/Aplikasi Logika Fuzzy**)

Suatu perusahaan makanan kaleng akan memproduksi makanan jenis ABC. Dari data 1 bulan terakhir, permintaan terbesar hingga mencapai 5000 kemasan/hari, dan permintaan terkecil sampai 1000 kemasan/hari. Persediaan barang digudang terbanyak sampai 600 kemasan/hari, dan terkecil pernah sampai 100 kemasan/hari. Dengan segala keterbatasannya, sampai saat ini, perusahaan baru mampu memproduksi barang maksimum 7000 kemasan/hari, serta demi efisiensi mesin dan SDM tiap hari diharapkan perusahaan memproduksi paling tidak 2000 kemasan. Apabila proses produksi perusahaan tersebut menggunakan 4 aturan fuzzy sbb:

```
[R1] IF Permintaan TURUN And Persediaan BANYAK
      THEN Produksi Barang BERKURANG;

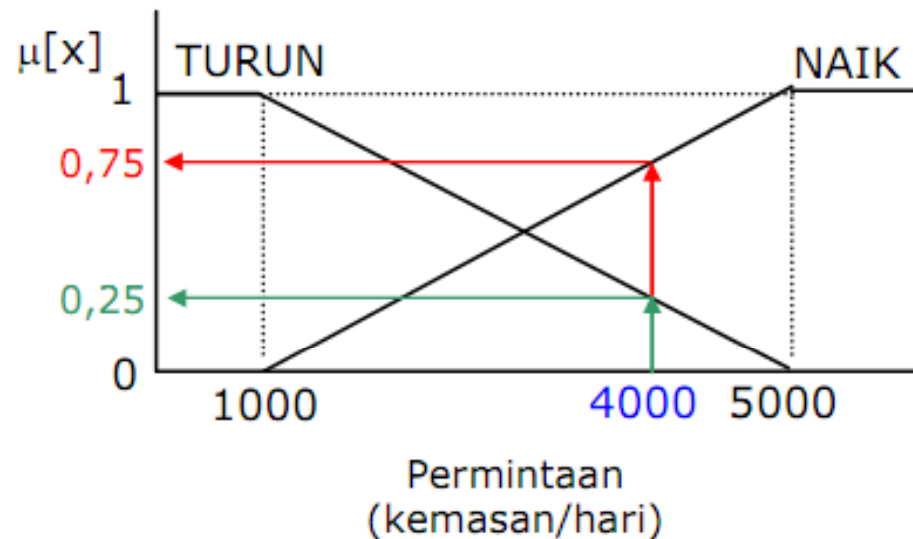
[R2] IF Permintaan TURUN And Persediaan SEDIKIT
      THEN Produksi Barang BERKURANG;

[R3] IF Permintaan NAIK And Persediaan BANYAK
      THEN Produksi Barang BERTAMBAH;

[R4] IF Permintaan NAIK And Persediaan SEDIKIT
      THEN Produksi Barang BERTAMBAH;
```

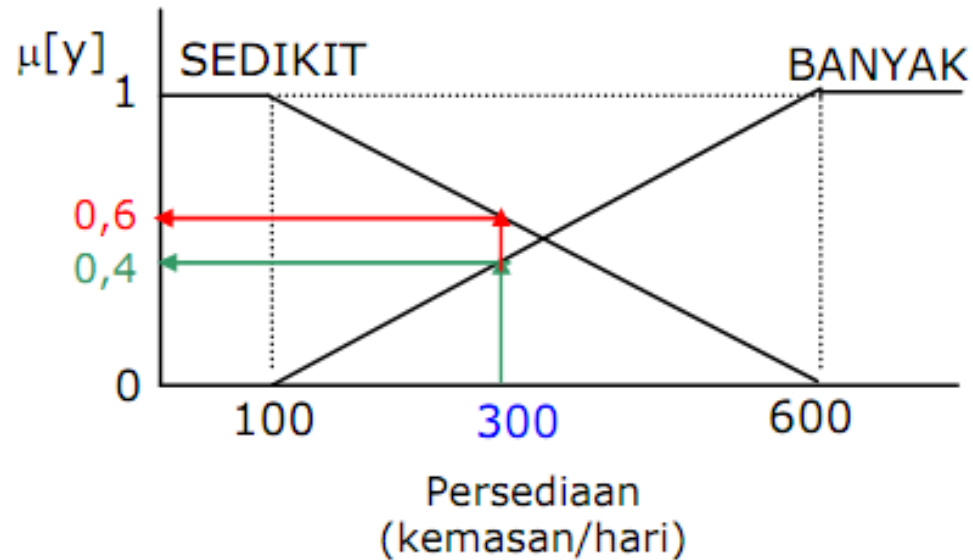
Berapa kemasan makanan jenis ABC yang harus diproduksi, jika jumlah permintaan sebanyak 4000 kemasan, dan persediaan di gudang masih 300 kemasan?

- Variabel linguistik: Permintaan, Persediaan, Produksi
- Permintaan = {NAIK, TURUN}



$$\mu_{\text{PmtTURUN}}[x] = \begin{cases} 1, & x \leq 1000 \\ \frac{5000 - x}{4000}, & 1000 \leq x \leq 5000 \\ 0, & x \geq 5000 \end{cases} \quad \mu_{\text{PmtNAIK}}[x] = \begin{cases} 0, & x \leq 1000 \\ \frac{x - 1000}{4000}, & 1000 \leq x \leq 5000 \\ 1, & x \geq 5000 \end{cases}$$

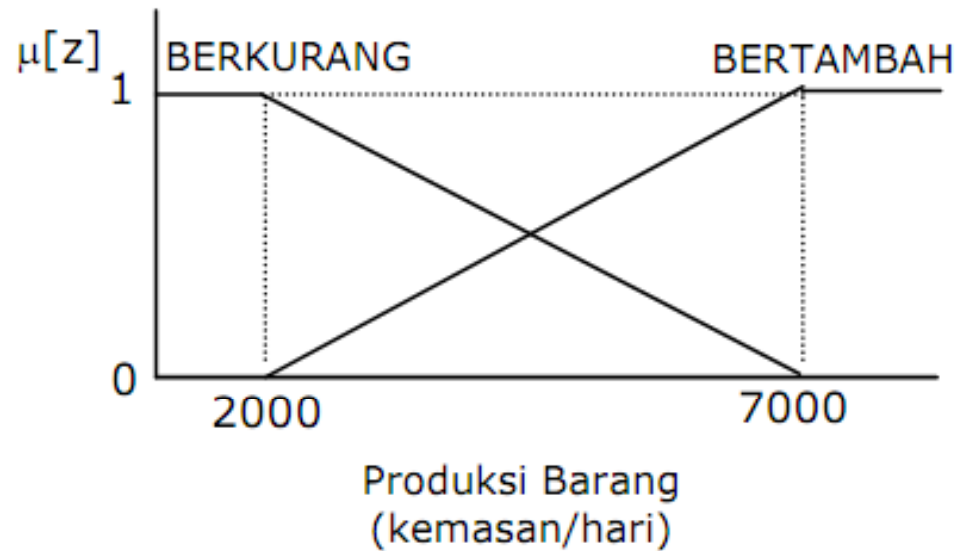
- Persediaan = {SEDIKIT, BANYAK}



$$\mu_{\text{PsdSEDIKIT}}[Y] = \begin{cases} 1, & y \leq 100 \\ \frac{600 - y}{500}, & 100 \leq y \leq 600 \\ 0, & y \geq 600 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{PsdBANYAK}}[Y] = \begin{cases} 0, & y \leq 100 \\ \frac{y - 100}{500}, & 100 \leq y \leq 600 \\ 1, & y \geq 600 \end{cases}$$

- Produksi barang = {BERKURANG, BERTAMBAH}



$$\mu_{\text{Pr Brg BERKURANG}}[z] = \begin{cases} 1, & z \leq 2000 \\ \frac{7000 - z}{5000}, & 2000 \leq z \leq 7000 \\ 0, & z \geq 7000 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{Pr Brg BERTAMBAH}}[z] = \begin{cases} 0, & z \leq 2000 \\ \frac{z - 2000}{5000}, & 2000 \leq z \leq 7000 \\ 1, & z \geq 7000 \end{cases}$$

- Ditanya: berapa jumlah produksi jika permintaan 4000 kemasan dan persediaan 300 kemasan?

## Penyelesaian:

### 1. Fuzzifikasi

$$\begin{aligned}\mu_{\text{PmtTURUN}}[4000] &= (5000-4000)/4000 \\ &= 0,25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{\text{PmtNAIK}}[4000] &= (4000-1000)/4000 \\ &= 0,75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{\text{PsdSEDIKIT}}[300] &= (600-300)/500 \\ &= 0,6\end{aligned}$$

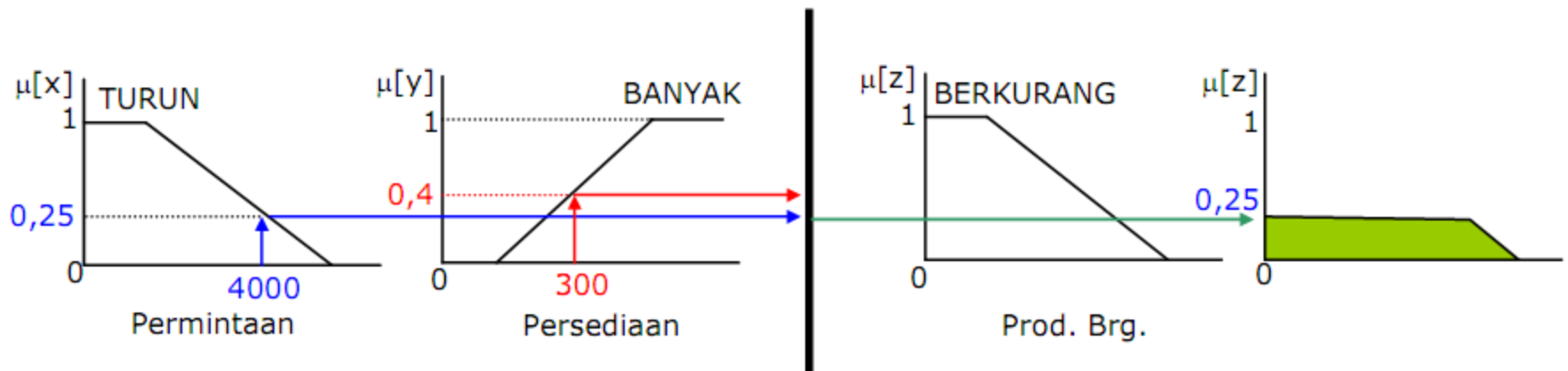
$$\begin{aligned}\mu_{\text{PsdBANYAK}}[300] &= (300-100)/500 \\ &= 0,4\end{aligned}$$

## 2. Operasi logika fuzzy dan 3. Implikasi

Kaidah fuzzy 1:

[R1] IF Permintaan TURUN And Persediaan BANYAK  
THEN Produksi Barang BERKURANG;

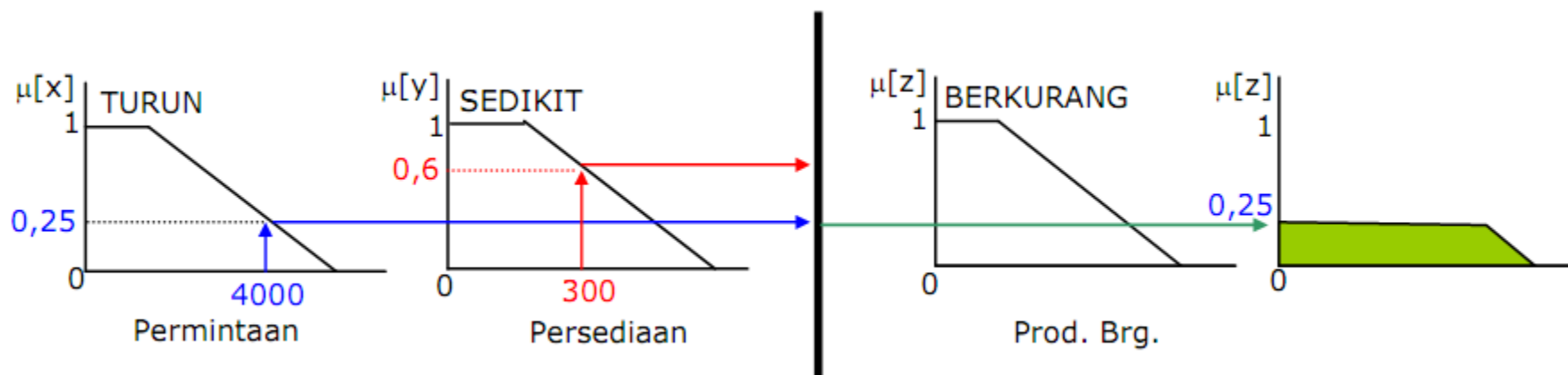
- Operasi logika  $\rightarrow \min(0.25, 0.40) = 0.25$
- Implikasi  $\rightarrow$  fungsi min



## Kaidah fuzzy 2:

{R2} IF Permintaan TURUN And Persediaan SEDIKIT  
THEN Produksi Barang BERKURANG;

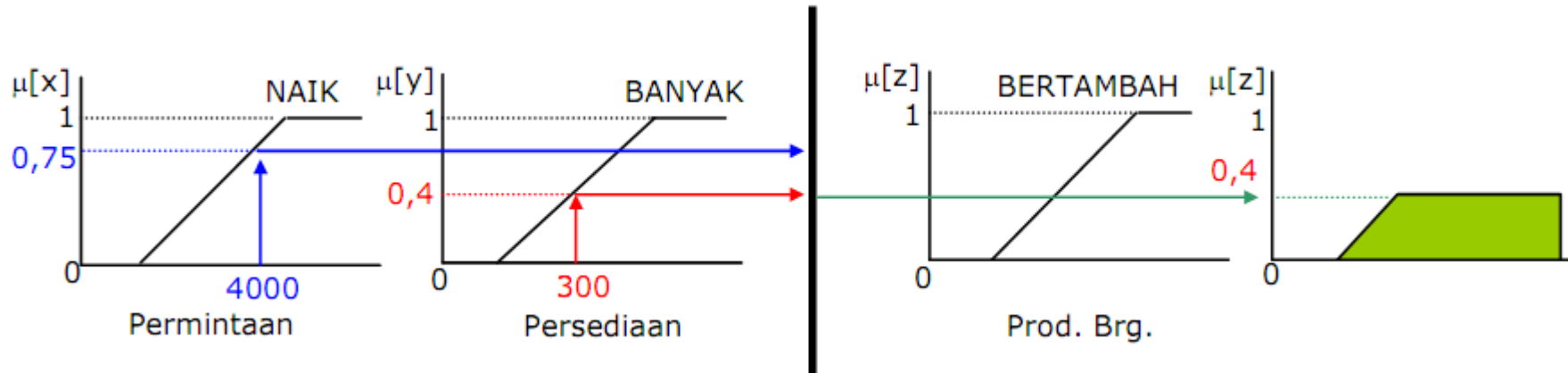
- Operasi logika  $\rightarrow \min(0.25, 0.6) = 0.25$
- Implikasi  $\rightarrow$  fungsi min



## Kaidah fuzzy 3:

[R3] IF Permintaan NAIK And Persediaan BANYAK  
THEN Produksi Barang BERTAMBAH;

- Operasi logika  $\rightarrow \min(0.75, 0.4) = 0.4$
- Implikasi  $\rightarrow$  fungsi min

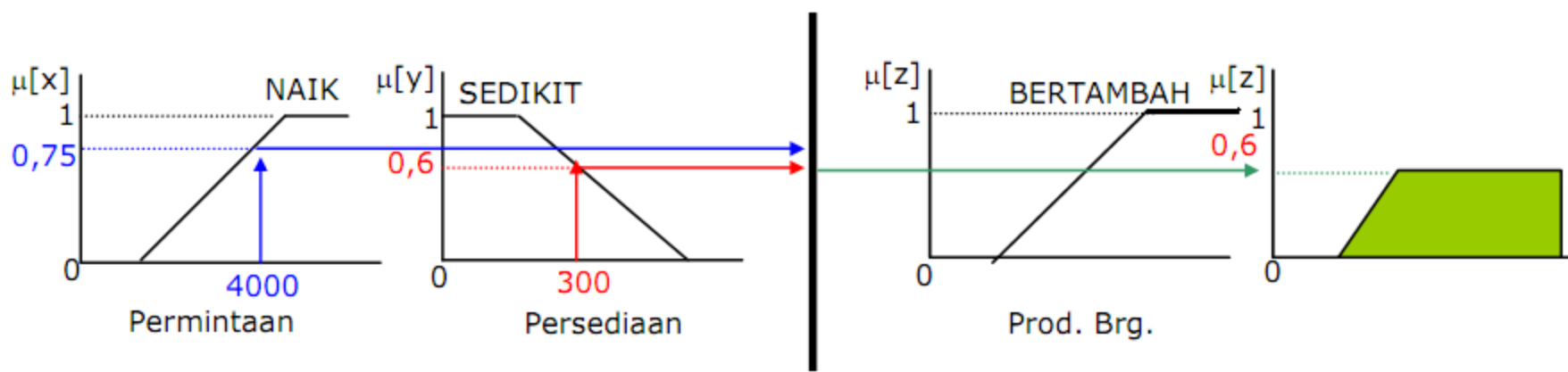




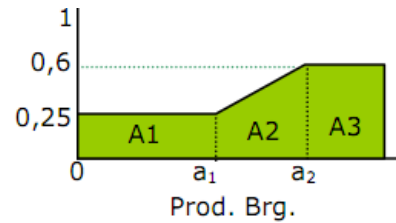
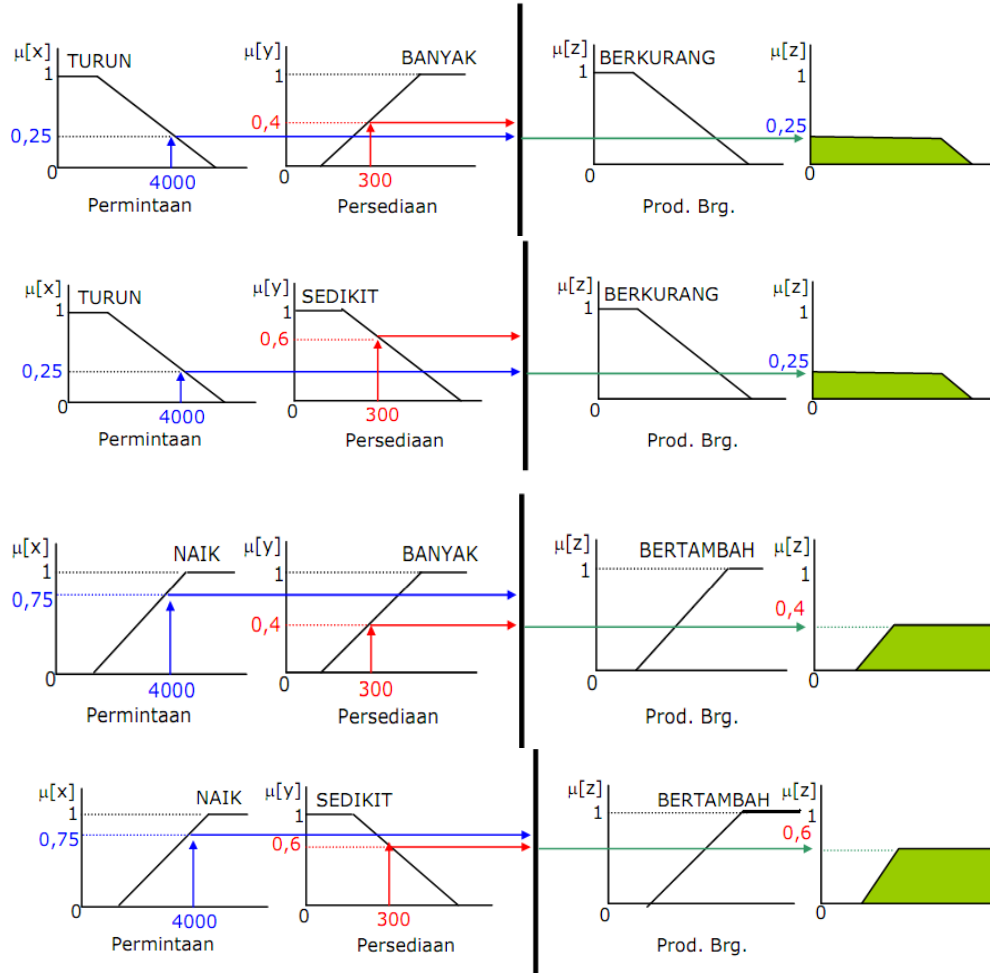
## Kaidah fuzzy 4:

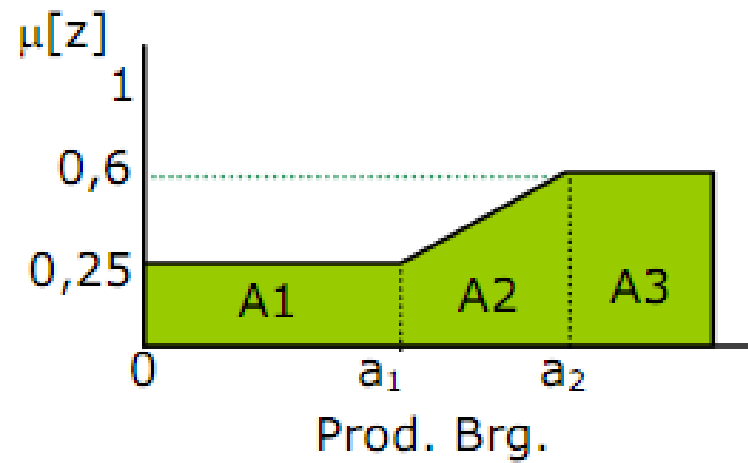
[R4] IF Permintaan NAIK And Persediaan SEDIKIT  
THEN Produksi Barang BERTAMBAH;

- Operasi logika  $\rightarrow \min(0.75, 0.6) = 0.6$
- Implikasi  $\rightarrow$  fungsi min



# 4. Agregasi $\rightarrow$ fungsi max





$$\mu[z] = \begin{cases} 0,25; & z \leq 3250 \\ (z - 2000) / 5000; & 3250 \leq z \leq 5000 \\ 0,6; & z \geq 5000 \end{cases}$$

## 5. Defuzzifikasi

- Metode yang digunakan: *centroid*

$$z^* = \frac{\int z \cdot \mu_C(z) dz}{\int \mu_C(z)} \rightarrow \text{Momen}$$
$$\int \mu_C(z) \rightarrow \text{Luas daerah}$$

- Momen:

$$M1 = \int_0^{3250} (0,25)z \, dz = 0,125z^2 \Big|_0^{3250} = 1320312,5$$

$$M2 = \int_{3250}^{5000} \frac{(z-2000)}{5000} z \, dz = \int_{3250}^{5000} (0,0002z^2 - 0,4z) \, dz = 0,000067z^3 - 0,2z^2 \Big|_{3250}^{5000} = 3187515,625$$

$$M3 = \int_{5000}^{7000} (0,6)z \, dz = 0,3z^2 \Big|_{5000}^{7000} = 7200000$$

- Luas daerah:

$$A1 = 3250 * 0,25 = 812,5$$

$$A2 = (0,25 + 0,6) * (5000 - 3250) / 2 = 743,75$$

$$A3 = (7000 - 5000) * 0,6 = 1200$$

- Titik pusat:

$$z = \frac{1320312,5 + 3187515,625 + 7200000}{812,5 + 743,75 + 1200} = 4247,74$$

Jadi jumlah makanan kaleng jenis ABC yang harus diproduksi sebanyak **4248** kemasan.

# Metode Sugeno

- FIS yang dibahas sebelum ini adalah FIS tipe Mamdani
- Tipe Mamdani merupakan tipe FIS standard yang umum dipakai
- Kelemahan FIS tipe Mamdani adalah tidak mangkus sebab harus menghitung luas daerah di bawah kurva
- FIS alternatif adalah FIS dengan metode Sugeno, yang diperkenalkan oleh Takagi-Sugeno-Kang.



Michio Sugeno

- Format kaidah fuzzy **Sugeno-**

**IF  $x$  is  $A$  AND  $y$  is  $B$  THEN  $z$  is  $f(x, y)$**

yang dalam hal ini:

- $x$ ,  $y$  dan  $z$  adalah peubah lingusitik;
- $A$  dan  $B$  adalah himpnan fuzzy ;
- $f(x, y)$  adalah fungsi matematik.

- Bentuk yang paling umum diguankan adalah model fuzzy Sugeno orde-nol:

**IF  $x$  is  $A$  AND  $y$  is  $B$  THEN  $z$  is  $k$**

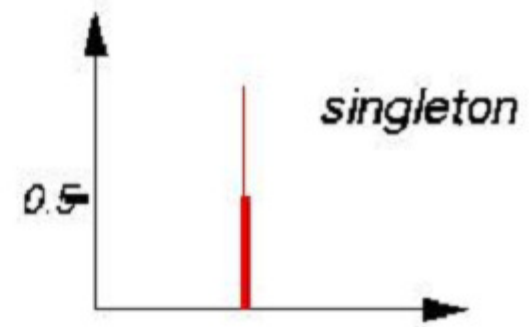
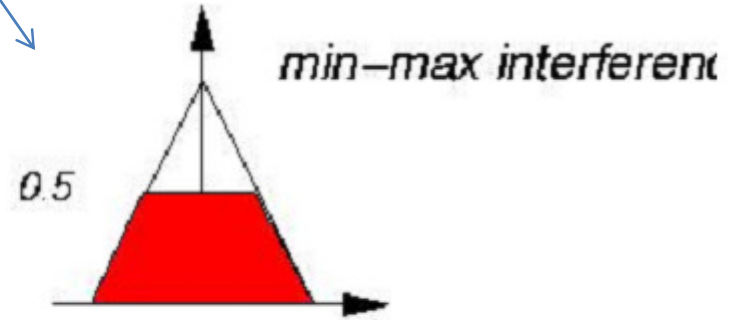
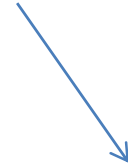
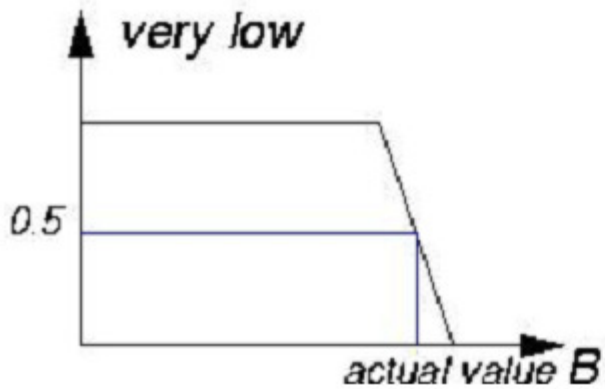
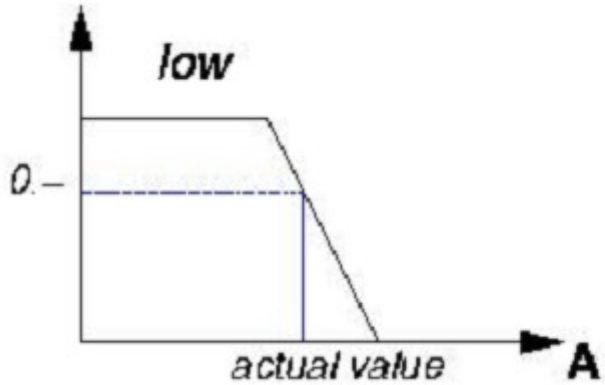
yang dalam hal ini  $k$  adalah konstanta.

Sumber: Alexander Rakic, Fuzzy Logic: Introduction 3, Fuzzy Inference



- Pada metode Sugeno, fuzzifikasi, operasi fuzzy, dan implikasi sama seperti metode Mamdani.
- Perbedaannya hanya pada agregasi dan defuzzifikasi.
- Jika pada metode Mamdani agregasi berupa daerah di bawah kurva, maka pada metode Sugeno agregasi berupa *singleton-singleton*.
- Pada kasus model Sugeno orde-nol, output setiap kaidah fuzzy adalah konstanta dan semua fungsi keanggotaan konsekuen dinyatakan dengan **singleton spikes**.

Mamdani



Sugeno

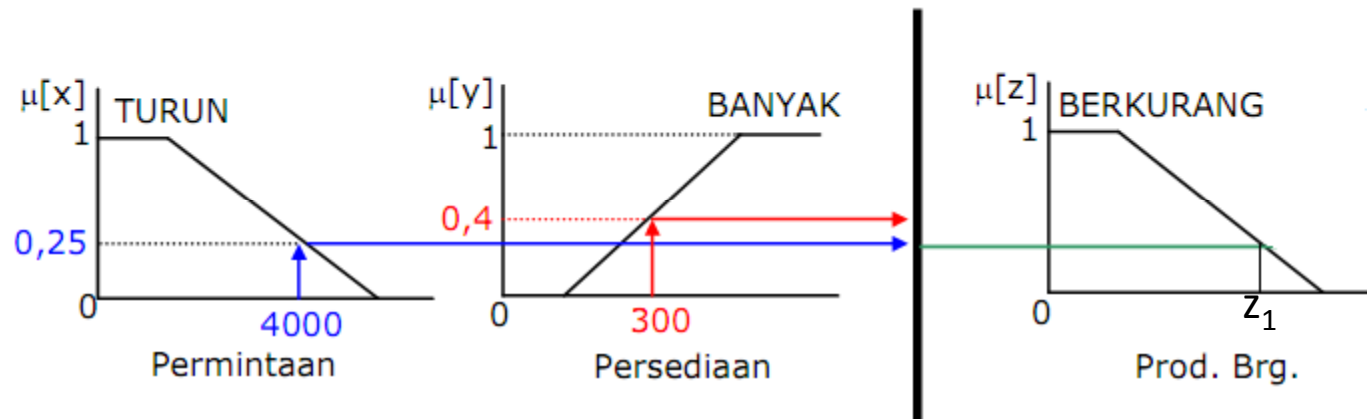
- Defuzzyfikasi pada metode Sugeno lebih sederhana, karena hanya menghitung *center of single-ton*:

$$z^* = \frac{\sum \mu_c(\bar{z}) \cdot \bar{z}}{\sum \mu_c(\bar{z})}$$

- yang dalam hal ini,  $\bar{z}$  adalah nilai *singleton*.

- Contoh: (masih soal sebelumnya, penerapan *center of singleton* pada Mamdani)

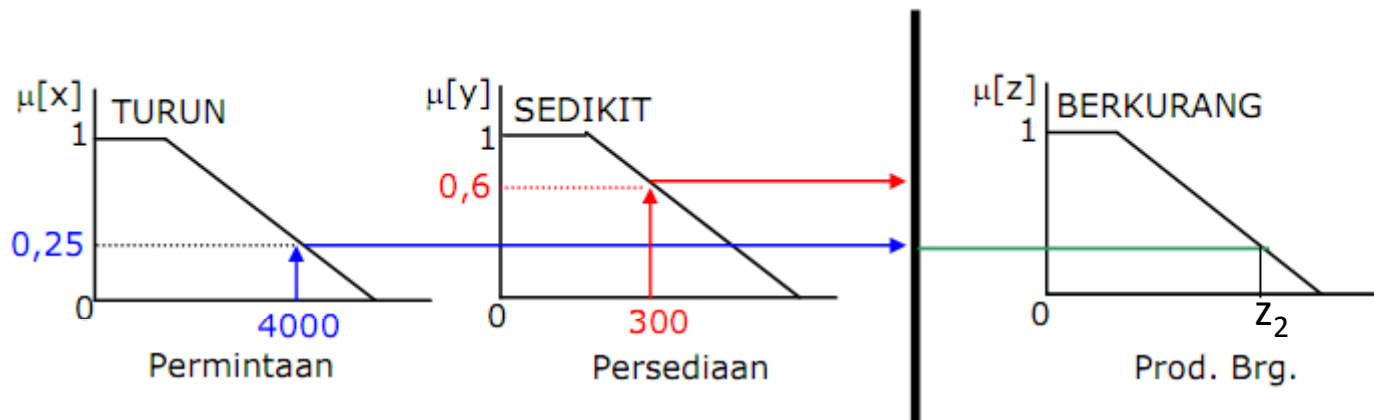
[R1] IF Permintaan TURUN And Persediaan BANYAK  
THEN Produksi Barang BERKURANG;



Lihat himpunan Produksi Barang BERKURANG,  
 $(7000-z)/5000 = 0,25 \quad \text{--->} \quad z_1 = 5750$

(Sumber: Sri Kusuma Dewi/Aplikasi Logika Fuzzy)

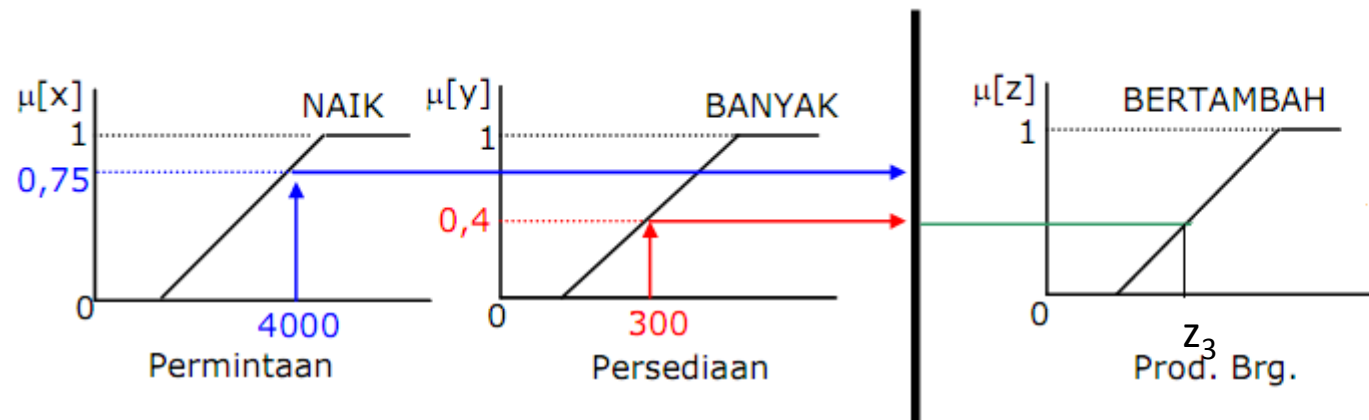
{R2} IF Permintaan TURUN And Persediaan SEDIKIT  
 THEN Produksi Barang BERKURANG;



Lihat himpunan Produksi Barang BERKURANG,

$$(7000-z)/5000 = 0,25 \quad \text{--->} \quad z_2 = 5750$$

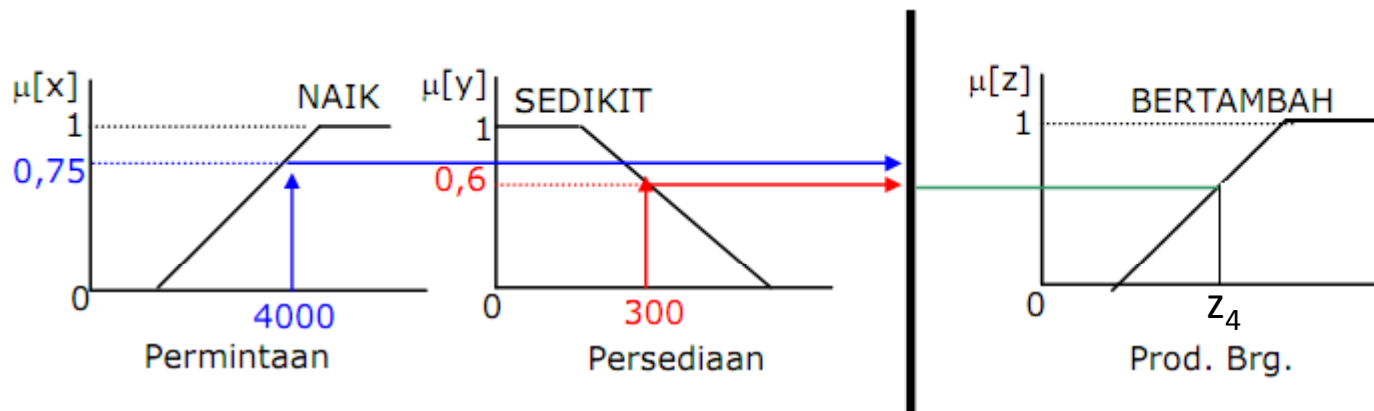
[R3] IF Permintaan NAIK And Persediaan BANYAK  
THEN Produksi Barang BERTAMBAH;



Lihat himpunan Produksi Barang BERTAMBAH,

$$(z-2000)/5000 = 0,4 \quad \text{--->} \quad z_3 = 4000$$

[R4] IF Permintaan NAIK And Persediaan SEDIKIT  
THEN Produksi Barang BERTAMBAH;



Lihat himpunan Produksi Barang BERTAMBAH,

$$(z-2000)/5000 = 0,6 \quad \text{--->} \quad z_4 = 5000$$

- Defuzzifikasi:

$$z^* = \frac{\sum \mu_c(\bar{z}) \cdot \bar{z}}{\sum \mu_c(\bar{z})}$$

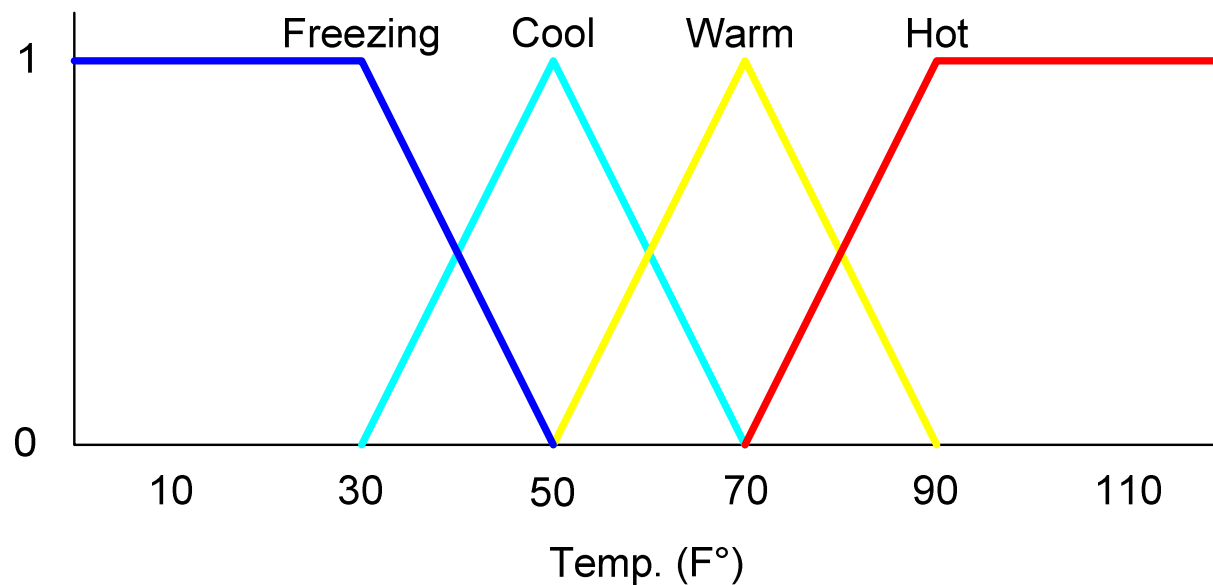
$$z = \frac{0,25 * 5750 + 0,25 * 5750 + 0,4 * 4000 + 0,6 * 5000}{0,25 + 0,25 + 0,4 + 0,6} = \frac{7475}{1,5} = 4983$$

Jadi jumlah makanan kaleng jenis ABC yang harus diproduksi sebanyak **4983** kemasan.



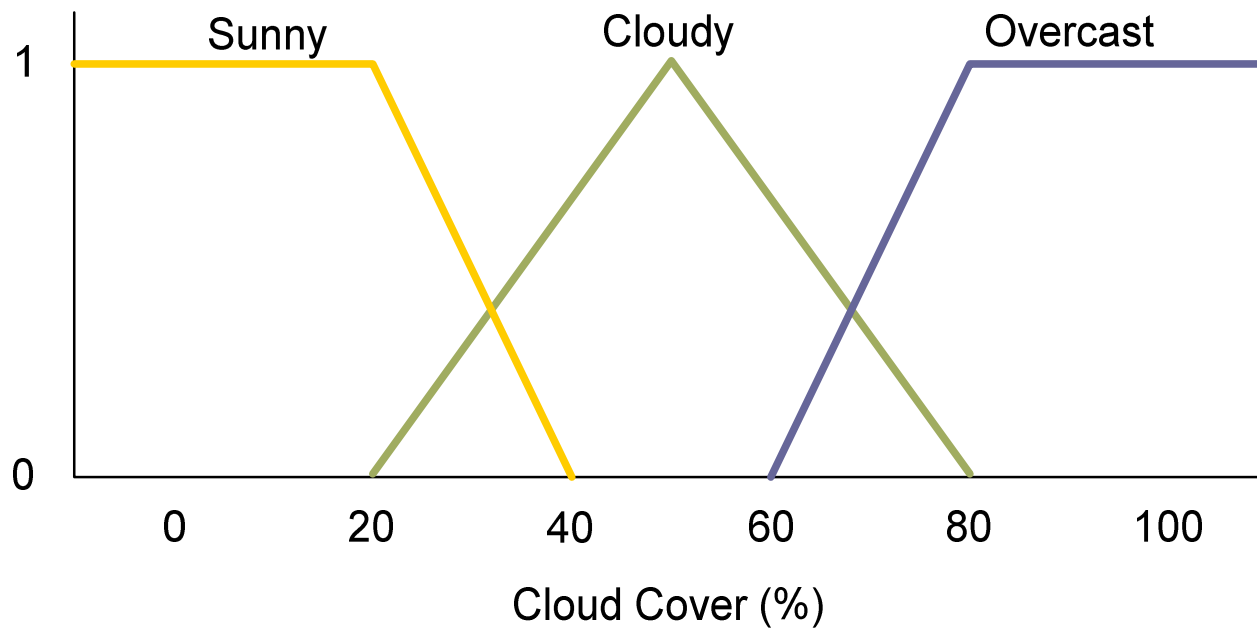
- Contoh: (*Speed control*) Seberapa cepat anda berkendara bergantung pada cuaca (temperatur dan keadaan langit)

Temp = {Freezing, Cool, Warm, Hot}

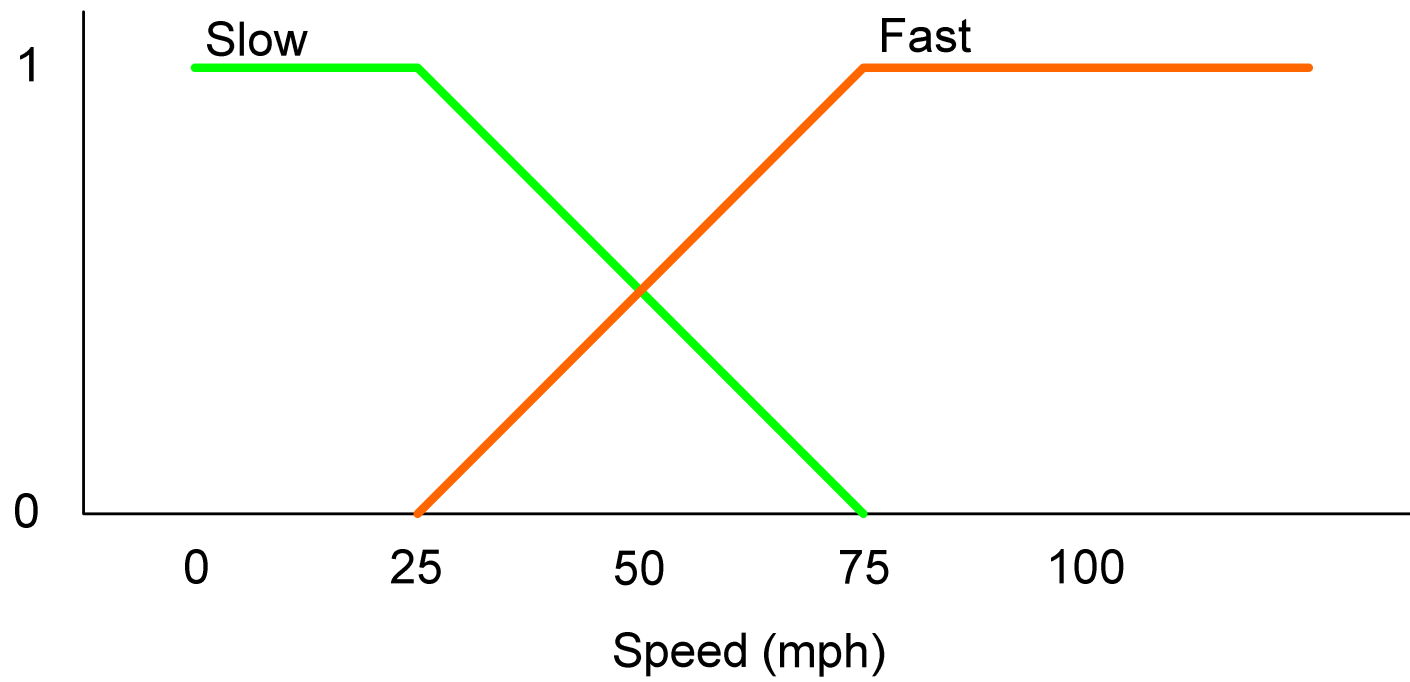


(Sumber: Andrew L. Nelson/ Introduction to Fuzzy Logic Control/University of South Florida)

Cover = {Sunny, Cloudy, Overcast}



Speed = {Slow, Fast}

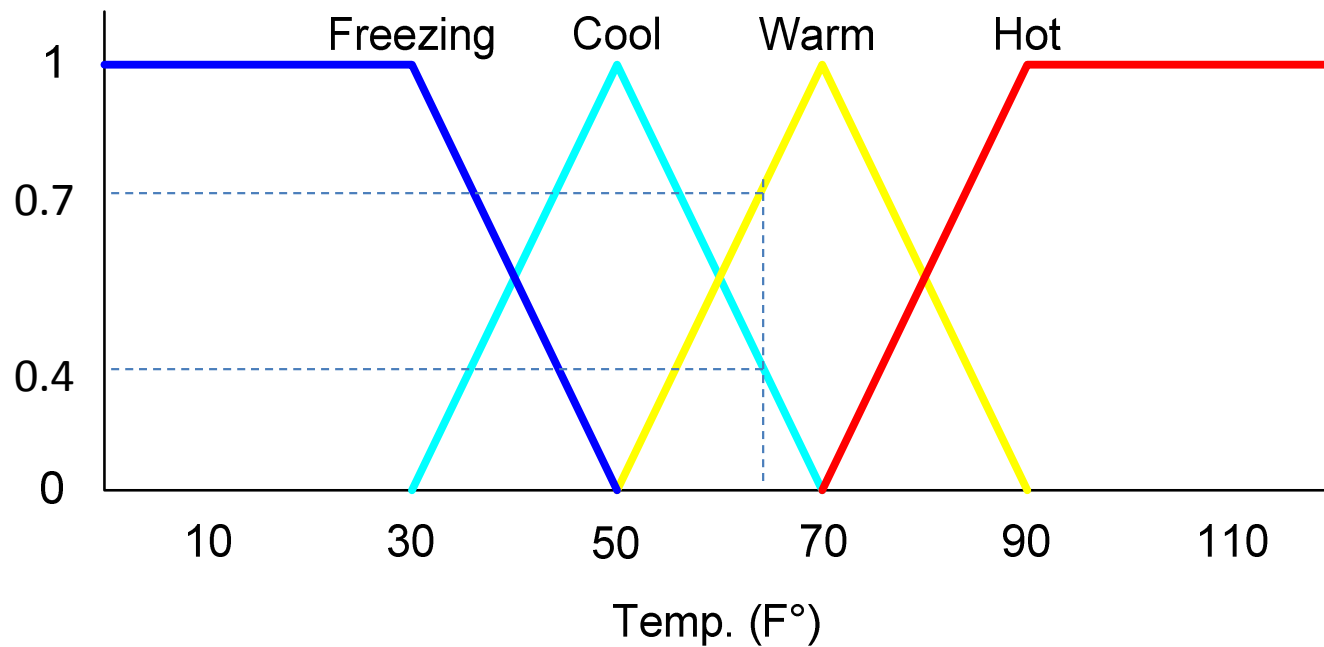


## Kaidah fuzzy:

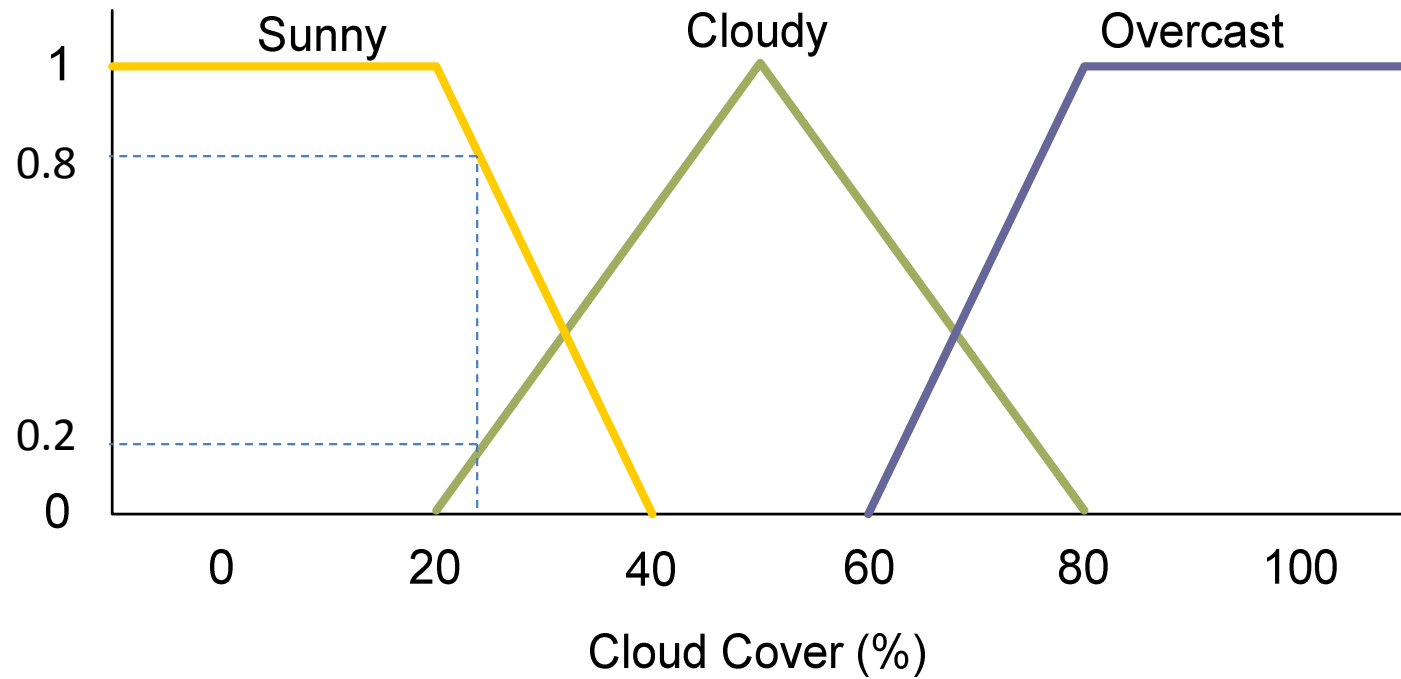
- If Cover is Sunny and temp is Warm then speed is Fast  
 $\text{Sunny}(\text{Cover}) \wedge \text{Warm}(\text{Temp}) \Rightarrow \text{Fast}(\text{Speed})$
- If cover is Cloudy and temp is Cool then speed is Slow  
 $\text{Cloudy}(\text{Cover}) \wedge \text{Cool}(\text{Temp}) \Rightarrow \text{Slow}(\text{Speed})$
- Pertanyaan: seberapa cepat berkendara jika temperatur 65 F° dan langit 25% berawan?

- Fuzzifikasi:

65 F°  $\Rightarrow$  Cool = 0.4, Warm = 0.7



25% berawan  $\Rightarrow$  Sunny = 0.8, Cloudy = 0.2



- Operasi fuzzy dan implikasi:

R1: If Cover is Sunny and temp is Warm then speed is Fast

$$\min(0.8, 0.7) = 0.7$$

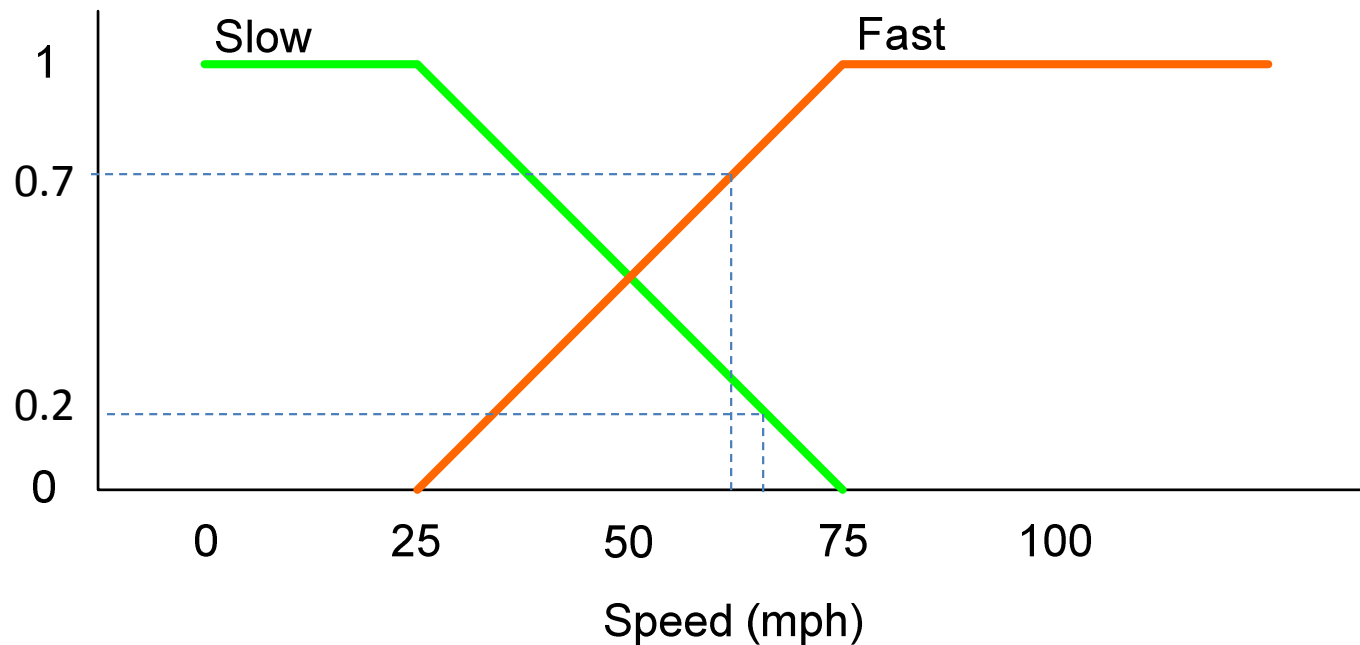
$$\Rightarrow \text{Fast} = 0.7$$

R2: If cover is Cloudy and temp is Cool then speed is Slow

$$\min(0.2, 0.4) = 0.2$$

$$\Rightarrow \text{Slow} = 0.2$$

- Agregasi dan Defuzzifikasi:



Persamaan garis Fast melalui (25, 0) dan (75, 1)  $\rightarrow \mu(z) = 0.02(z - 25)$   
 $\mu(z) = 0.7 \rightarrow z = 0.7/0.02 + 25 = 60$

Persamaan garis Slow melalui (25, 1) dan (75, 0)  $\rightarrow \mu(z) = -0.02(z - 75)$   
 $\mu(z) = 0.2 \rightarrow z = 0.2/(-0.02) + 75 = 65$



$$z^* = \frac{(0.7 \times 60) + (0.2 \times 65)}{0.2 + 0.7} = 61.1$$

Jadi, kecepatan berkendara adalah 61 mph

# Mamdani or Sugeno?

- Mamdani method is widely accepted for capturing expert knowledge. It allows us to describe the expertise in more intuitive, more human-like manner. However, Mamdani-type fuzzy inference entails a substantial computational burden.
- On the other hand, Sugeno method is computationally effective and works well with optimization and adaptive techniques, which makes it very attractive in control problems, particularly for dynamic nonlinear systems.

Sumber: Alexander Rakic, Fuzzy Logic: Introduction 3, Fuzzy Inference